



Les vecteurs

ORIGINE DES VECTEURS

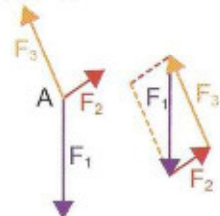
Le vecteur a une place importante dans les sciences, il est tant une entité géométrique qu'un concept algébrique mais il permet également la schématisation de grandeurs physiques. Il est considéré et employé à la fois comme un objet, c'est-à-dire un élément de savoir mathématique ou de représentation d'une grandeur en physique (force ou vitesse par exemple) et comme un outil de résolution de problèmes. Le vecteur a de nombreux rôles et utilités. Étymologiquement, le mot vecteur vient du latin *vector* qui signifie passer et de *vehere* qui signifie transporter. Il apparaît dans un premier temps que l'utilisation du terme vecteur est liée aux nombres relatifs et aux nombres complexes et dans un deuxième temps à l'évolution de la mécanique, plus particulièrement à l'étude des mouvements et des forces.

HISTOIRE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE

L'origine mathématique du calcul vectoriel remonte à plus de 300 ans, et cela pour trois raisons principales. En premier lieu, au xv^e siècle, l'étude des solutions des équations du 3^e degré a conduit les mathématiciens à utiliser des racines carrées négatives, encore appelées « nombres imaginaires ». Les nombres complexes étaient tout d'abord vus avec méfiance par un grand nombre de mathématiciens. Cependant, certains d'entre eux décidèrent de les étudier et essayèrent d'en trouver une image géométrique. La première tentative de représentation des nombres complexes fut faite par Wallis au $xvii^e$ siècle. Un Norvégien, Wessel, publie en 1799 une interprétation des nombres complexes par des lignes du plan avec une tentative d'extension à l'espace. D'autres mathématiciens travaillèrent également indépendamment sur ce sujet, parmi lesquels on peut citer : Buée, Argand, Warren, Mourey et Gauss qui publièrent, au début du xix^e siècle, des ouvrages mathématiques sur la manière de représenter les nombres complexes dans les constructions géométriques. Ces nombres ont été utilisés comme un outil de calcul pendant près de 200 ans. Puis les mathématiciens ont été conduits à déterminer un sens sur une droite et donc des « segments orientés dans le plan ». De plus, Leibniz à la fin du $xvii^e$ siècle critiqua la géométrie cartésienne. Il voulait un calcul opérant directement sur les figures et non

des intermédiaires algébriques étrangers à la géométrie. Il suggère ainsi une nouvelle algèbre où les symboles représentent des entités géométriques. Son système repose sur la notion de congruence de points et de figures. Enfin, la dernière raison, même indirecte, pouvant être considérée comme une des origines du calcul vectoriel, est le développement de l'étude des mouvements par Newton au $xvii^e$ siècle. La mécanique newtonienne développe par le caractère vectoriel des notions de vitesse et d'accélération. En effet, pour Newton, la vitesse peut varier de deux façons : en intensité et en direction. Cette conception a une origine plus ancienne, en effet l'utilisation du parallélogramme des vitesses a déjà été faite par les Grecs (Archimède, Héron d'Alexandrie). Quant à l'emploi du parallélogramme des forces, il apparaît souvent au xvi^e siècle et au $xvii^e$ siècle. Le parallélogramme des forces est un diagramme qui permet de calculer les composantes d'une résultante, mais n'est pas vu comme définissant la somme de deux objets géométriques. Le point A est à l'équilibre, la force F1 est la diagonale du parallélogramme de forces (F2 ; F3).

$F_1 = F_2 + F_3$



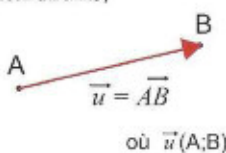
Par convention, on écrira les vecteurs en caractères gras dans le texte qui suit. Ainsi, \vec{AB} équivaut à \vec{AB} .

APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

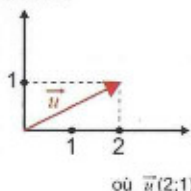
DÉFINITION

Un vecteur est défini par une longueur, un sens et une direction. L'usage est de représenter un vecteur par une flèche. La longueur est la distance qui sépare ses deux extrémités, la direction est déterminée par un axe. Un vecteur est déterminé par :

- deux points (bipoints) : son origine et son extrémité ;



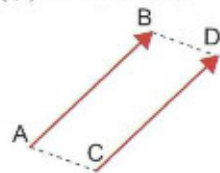
• ou des scalaires (nombres) : ses coordonnées dans l'espace considéré.



où $\vec{u}(2;1)$

ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Si les deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux, alors ABCD forme un parallélogramme. $\vec{AB} = \vec{CD}$ équivaut à \vec{AB} et \vec{CD} ont la même longueur, le même sens et les bipoints (A,B) et (C,D) ont la même direction

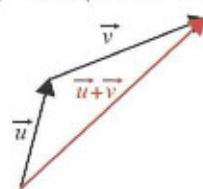


SOMME DE VECTEURS

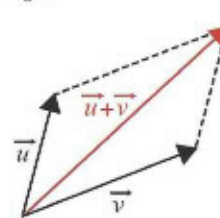
Méthode mathématique : Soient \vec{AB} et \vec{CD} deux vecteurs définis de la manière suivante : $\vec{AB}(x; y)$ et $\vec{CD}(z; t)$. On additionne deux à deux les coordonnées des deux vecteurs. Ainsi, les coordonnées de $\vec{AB} + \vec{CD}$ sont $(x+z; y+t)$.

Méthodes géométriques :

La somme des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est un vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$.
• On met l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier, la somme est le vecteur qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité du second. C'est le troisième côté d'un triangle formé par les deux premiers vecteurs.



• On met les origines des deux vecteurs en un même point, on trace un parallélogramme dont les vecteurs sont deux côtés, la somme est alors la diagonale du parallélogramme partant de l'origine.



LA RELATION DE CHASLES

Pour tous points A, B, C, on a :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

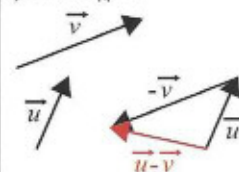
AUTRES CAS PARTICULIERS

- Le vecteur nul : $\vec{AA} = \vec{0}$.
- L'opposé d'un vecteur : $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$
- $\vec{AB} = -\vec{BA}$

• Un vecteur et son opposé ont la même longueur, la même direction mais des sens opposés.
• L'addition de vecteurs est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

SOUSTRACTION DE VECTEURS

Soustraire un vecteur revient à ajouter son opposé.



MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

Soient \vec{u} un vecteur et k un réel. La multiplication du vecteur \vec{u} par le nombre k peut donner :

- si $k = 0$, $0 \times \vec{u} = \vec{0}$
- si $k > 0$, $k \times \vec{u}$ et \vec{u} ont même sens, même direction mais de longueurs différentes d'un facteur k .
- si $k < 0$, $k \times \vec{u}$ et \vec{u} ont même direction, mais sont de sens opposés et de longueurs différentes d'un facteur k .

On a alors les propriétés de la multiplication suivantes :

- la distributivité (cas de la multiplication d'un vecteur par une somme de scalaires) :

$$(k + k') \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + k' \cdot \vec{u}$$

• la distributivité (cas de la multiplication d'un scalaire par une somme de vecteurs) :

$$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$$

• la commutativité de la multiplication :

$$k \cdot (k' \cdot \vec{u}) = k' \cdot (k \cdot \vec{u}) = k \cdot k' \cdot \vec{u}$$

COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si :

- l'un des vecteurs est nul ;
 - il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.
- Les propriétés de la colinéarité de deux vecteurs sont les suivantes :
- trois points A, B, C sont alignés si et seulement si \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires ;
 - si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires ;
 - inversement, si \vec{AB} et \vec{CD} sont

colinéaires, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.

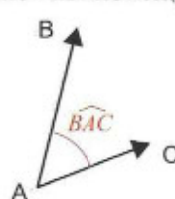
TRANSLATIONS

Soit un vecteur \vec{u} . On appelle translation de vecteur \vec{u} , la transformation géométrique qui à tout point M fait correspondre le point M' tel qu'on ait l'égalité vectorielle : $\vec{MM}' = \vec{u}$. Une translation est un déplacement du plan, qui n'implique de changement ni sur les distances, ni les directions et ni sur le sens. La composée de deux translations de vecteurs respectifs \vec{u} et \vec{v} est une translation de vecteur la somme de ces deux vecteurs : $\vec{u} + \vec{v}$.

PRODUIT SCALAIRE

Soient deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} non nuls. Le produit scalaire des deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} , noté $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, est le réel défini par :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$



où \widehat{BAC} = angle formé par (AB, AC)
= angle A

- Si l'un des deux vecteurs est nul alors le produit scalaire est nul : si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- On appelle carré scalaire et l'on note u^2 le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ qui est égal au carré de la longueur du vecteur \vec{u} .

Norme d'un vecteur

La norme euclidienne d'un vecteur représenté par un bipoint (A,B) est la distance qui sépare A de B. Elle est égale à la racine carrée du produit scalaire du vecteur avec lui-même. Elle est en général notée :

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

Propriétés

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteur et α et β deux réels. Les propriétés du produit scalaire sont suivantes :

- commutativité du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- distributivité (du produit scalaire sur l'addition de vecteurs) : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\vec{v} + \vec{w})^2 = \vec{v}^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- multiplication par un réel : $(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta \vec{u} \cdot \vec{v}$

Découverte des vecteurs

xv^e siècle

Découverte des vecteurs.

Newton (1642 - 1727)

Développe les notions de vecteur vitesse et vecteur accélération en physique.

Argand (1768 - 1822)

Premier à interpréter géométriquement les nombres imaginaires.

1804

Première formalisation des vecteurs réalisée par Bernard Bolzano.

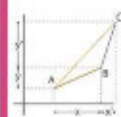
2

Nombre de vecteurs nécessaires pour définir le plan.

3

Nombre de vecteurs nécessaires pour définir l'espace.

Réalisée par Wessel



en

1799

• vecteurs orthogonaux :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

• vecteurs colinéaires : \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$$

Inégalité de Cauchy - Schwarz

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconques. La valeur absolue du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est inférieure ou égale au produit de leurs normes :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

DIMENSION 2 ET 3

LES VECTEURS DANS LE PLAN

Une famille de vecteurs forme une base si aucun de ces vecteurs ne peut se déduire des autres par une combinaison linéaire (une telle famille est dite libre) et si tout vecteur de l'espace peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base (une telle famille est dite génératrice). On définit donc une base du plan comme une famille de deux vecteurs (\vec{i}, \vec{j}) qui définissent le plan : pour tout vecteur \vec{u} , il existe α et β tels que : $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$

Les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont alors $(\alpha; \beta)$. On note $\alpha(\vec{i}; \vec{j})$ ou α et β sont respectivement appelés abscisse et ordonnée. On définit alors le vecteur colonne qui correspond aux coordonnées du vecteur \vec{u} , mises dans un tableau sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{abscisse} \\ \text{ordonnée} \end{matrix}$$

Les coordonnées des vecteurs de base sont alors :

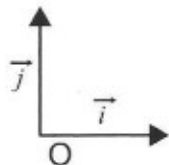
$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base orthonormale

On appelle base orthonormale, une base dont les vecteurs sont de norme égale à un et qui sont orthogonaux : (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormale si (\vec{i}, \vec{j}) est une base telle que :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

Une base orthonormale est munie d'un point de référence, appelé origine, dont les composantes seront $(0; 0)$. En général ce point est noté O . On note ce repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .



Opérations sur les vecteurs

On se place dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soient $\vec{u}(u_x, u_y)$ et $\vec{v}(v_x, v_y)$ deux vecteurs quelconques dans le plan.

- Égalité : les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales :

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_x \\ u_y = v_y \end{cases}$$

• Addition : la somme des vecteurs \vec{u} et \vec{v} a pour coordonnées la somme des coordonnées de \vec{u} et de \vec{v} :

$$\vec{u} + \vec{v}(u_x + v_x; u_y + v_y)$$

• Soustraction : la soustraction du vecteur \vec{v} au vecteur \vec{u} est l'addition du vecteur \vec{u} et du vecteur $-\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v}(u_x - v_x; u_y - v_y)$$

• Multiplication par un réel : multiplier le vecteur \vec{u} par un réel α revient à multiplier chacune de ses coordonnées par α :

$$\alpha \vec{u}(\alpha u_x; \alpha u_y)$$

• Produit scalaire : le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le réel égal à

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

• La norme du vecteur est égale à :

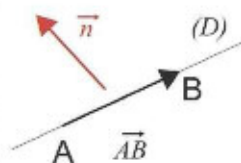
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $u_x v_x + u_y v_y = 0$

Les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $u_x v_y - u_y v_x = 0$.

Vecteurs de droite

On appelle vecteur directeur d'une droite (D) tout vecteur \vec{AB} tel que les points A et B appartiennent à cette droite et soient distincts. On appelle vecteur normal à une droite (D) tout vecteur \vec{n} non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (D) .



LES VECTEURS DANS L'ESPACE

On peut prolonger la notion de vecteur dans l'espace. On passe alors de deux composantes à trois. Une base de l'espace est une famille de trois vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui définissent l'espace. Pour tout vecteur \vec{u} , il existe α, β et γ tels que :

$$\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

Coordonnées

Les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont alors (α, β, γ) . On note (α, β, γ) où α, β et γ sont respectivement appelés abscisse, ordonnée et cote. On a, de même, la notion de vecteur colonne qui est la représentation des coordonnées du vecteur dans un tableau :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{abscisse} \\ \text{ordonnée} \\ \text{cote} \end{matrix}$$

Les coordonnées des vecteurs de base sont :

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soient deux points $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$. Les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$$

Base orthonormale dans l'espace

Une base orthonormale est définie de la même façon : c'est une base dont les trois vecteurs sont de norme égale à un et qui sont orthogonaux. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base telle que :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

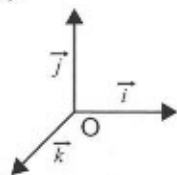
et

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

Un repère orthonormal dans l'espace est toujours une base orthonormale munie d'une origine. On note ce repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Opérations en dimension 3 sur les vecteurs

Soient $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs quelconques dans l'espace.

• Égalité :

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$$

• Addition :

$$\vec{u} + \vec{v}(u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

• Soustraction :

$$\vec{u} - \vec{v}(u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$$

• Multiplication par un réel :

$$\alpha \vec{u}(\alpha u_1; \alpha u_2; \alpha u_3)$$

• Produit scalaire : le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

• La norme du vecteur \vec{u} est égale à :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

• Les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$$

• Les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$.

Vecteurs de droite

Les notions de vecteur directeur de droite et de vecteur normal à une droite restent les mêmes. Les vecteurs sont simplement définis dans l'espace : ils auront trois coordonnées.

NOTIONS PROPRES À LA DIMENSION 3

Soient trois vecteurs quelconques dans l'espace $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ et $\vec{w}(w_1; w_2; w_3)$.

• Base orientée : il est possible d'orienter une base dans l'espace. Une base est dite directe lorsqu'elle respecte la règle de la main droite. Sinon, elle est indirecte.

• Règle de la main droite : une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe si on peut mettre le premier vecteur (\vec{i}) dans la direction du pouce, le second (\vec{j}) dans la direction de l'index et le troisième (\vec{k}) dans la direction du majeur.

• Coplanarité : deux vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs

directions sont dans le même plan.

• Si \vec{u} et \vec{v} définissent un plan, on dit alors que le vecteur \vec{w} est coplanaire aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

- il est dans le plan (\vec{u}, \vec{v}) ;
- il est la combinaison linéaire de \vec{u} et de \vec{v} ;
- il existe α et β tel que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

PRODUIT VECTORIEL

Soient trois vecteurs quelconques dans l'espace : \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} et λ un réel. Le produit vectoriel des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non colinéaires, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur normal au plan défini par la base (\vec{u}, \vec{v}) , dont la norme vaut

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe. On peut combiner trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} par deux produits vectoriels successifs. C'est ce qu'on appelle un double produit vectoriel. En particulier les doubles produits vectoriels $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ sont respectivement les vecteurs :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

Il existe un moyen mnémotechnique pour retenir la valeur d'un double produit vectoriel :

Soient \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} trois vecteurs. On a alors :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{c}$$

Ordre alphabétique = « cab » - « bac » où les parenthèses sont les plus près possible du signe =.

Propriétés

Les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

• Distributivité sur l'addition :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$$

• Multiplication par un scalaire :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

• Anti-commutativité :

$$\lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{v}$$

Attention le produit vectoriel n'est pas associatif, en effet comme on l'a vu dans la définition du double produit vectoriel $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

PRODUIT MIXTE

Soient trois vecteurs quelconques dans l'espace $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ et $\vec{w}(w_1; w_2; w_3)$. On appelle produit mixte des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} le réel $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ tel que :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Propriétés

Le produit mixte change de signe par permutation de deux vecteurs.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$$

Le produit mixte reste inchangé par permutation circulaire des trois vecteurs.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

Pour tout réel λ , on a :

$$[\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

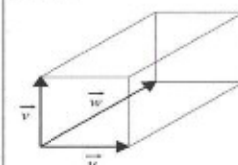
Pour tout vecteur \vec{a} , on a :

$$[\vec{u} + \vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v} + \vec{a}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{a}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{a}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}]$$

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$. La valeur absolue du produit mixte de \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}|$ est le volume du parallélépipède engendré par ces trois vecteurs.



Si deux des trois vecteurs sont égaux ou colinéaires, alors le produit mixte est nul. Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls alors : \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = 0$.

APPROCHE ALGÈBRE

DIMENSION N

L'extension à la dimension finie n est effectuée de la même façon que pour passer du plan à l'espace. Ainsi, on a rapidement les définitions et propriétés suivantes : une base est une famille de n vecteurs $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n}$ qui définissent l'espace de dimension n . Pour tout vecteur \vec{u} , il existe $(u_i)_{i=1, \dots, n}$ tel que :

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i$$

Coordonnées

$(u_i)_{i=1, \dots, n}$ sont les coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les coordonnées du vecteur de base \vec{e}_i sont :

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ligne } i^{\text{ème}}$$

Base orthonormale dans l'espace

Une base orthonormale est définie de la même façon : c'est une base dont les vecteurs sont de norme égale à un et qui sont orthogonaux.

Opérations en dimension n sur les vecteurs

Soient $\vec{u}(u_i)_{i=1, \dots, n}$ et $\vec{v}(v_i)_{i=1, \dots, n}$ deux vecteurs quelconques.

• Égalité :

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad u_i = v_i$$

• Addition :

$$\vec{u} + \vec{v}(u_i + v_i)_{i=1, \dots, n}$$

• Multiplication par un réel :

$$\alpha \vec{u}(\alpha u_i)_{i=1, \dots, n}$$

• Produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

• Norme d'un vecteur :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

• Orthogonalité :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

• Vecteurs de droite : les notions de vecteur directeur et normal sont une nouvelle fois les mêmes. Les vecteurs sont définis dans l'espace, ils auront trois coordonnées.