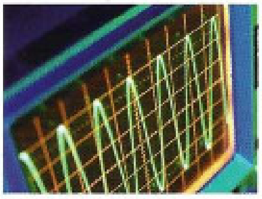
Vibrations et résonances

UNE DIMENSION DYNAMIQUE



De nombreux problèmes physiques qui au premier abord paraissent déroutants prennent du sens lorsqu'ils sont appréhendés sous l'angle des vibrations. À l'image du pont cédant sous les pas d'une troupe de militaires, pourtant plus légère qu'un trente-tonnes, certains faits échappent à l'explication statique qu'on pourrait en faire. Dans ces cas, il s'agit de considérer une dimension dynamique, fonction donc du temps, en plus de la simple analyse en termes de forces. La nature n'est bien représentée par des forces s'appliquant instantanément et de manière uniforme dans le temps qu'en première approximation, bien souvent le physicien ne peut pas négliger leurs composantes temporelles. Les forces deviennent donc des signaux et lorsque ces derniers prennent des formes cycliques, périodiques, apparaissent vibrations et résonances. Nous verrons dans la suite de cette fiche quelques outils qui permettent d'appréhender voire de résoudre certains de ces problèmes. Il s'agira principalement d'écrire, à partir de la description de la situation, les équations maîtresses du système, d'en extraire une réponse type pour certains signaux, éventuellement de la visualiser, puis de déterminer quelle forme de stimulation s'applique sur notre objet physique, et finalement de dégager la réponse de ce dernier. L'interprétation physique viendra ensuite compléter notre analyse.

QUELQUES EXEMPLES CONCRETS

Afin de mieux cerner le sujet, et l'apport de cette nouvelle façon d'aborder les problèmes, il convient sans doute de présenter quelques exemples où cette manière de raisonner fournit des prédictions conformes à ce que l'observation rapporte dans le cas réel, alors qu'une approche statique reste incapable d'expliquer aussi bien la réalité.

La balançoire

Un exemple assez intuitif, et pourtant pas des plus simples une

fois mis en équation, est celui de la ***balançoire***. On considérera le cas où l'enfant sur la balançoire est immobile et assisté par un adulte pour monter de plus en plus haut (figure 1).

L'adulte que nous appellerons A dans la suite, pour plus de facilité, pousse sur la balançoire lorsque l'enfant E est arrivé au point le plus haut d'un côté. C'est-à-dire que ce dernier décrit des arcs de cercles entre deux points P1 et P2 qui se déplacent vers le haut dans le temps et que A applique une force constante d'intensité F pendant une période T, elle aussi constante, au moment où E rejoint le point P1, le plus proche de A. Le signal d'entrée – la force que A exerce sur E – est ici carré et ressemble à ce qui est représenté sur la figure 2. Par expérience, nous savons tous que la poussée sur la balançoire ne peut être aléatoire sans quoi celle-ci ne gagne pas en hauteur. De plus les intervalles séparant ces poussées changent, il s'agit ici d'une résonance dite paramétrique puisque le temps intervient dans le signal optimal d'entrée. La balançoire accumule de l'énergie, elle monte, uniquement si la force f(t) appliquée sur l'enfant présente un profil similaire à celui de la figure 2 au sens où des impulsions se succèdent à intervalles de plus en plus grands. C'est-à-dire que les moments où l'adulte pousse l'enfant s'espacent de plus en plus, sinon il finirait par pousser lors de sa descente, contre-productivement.

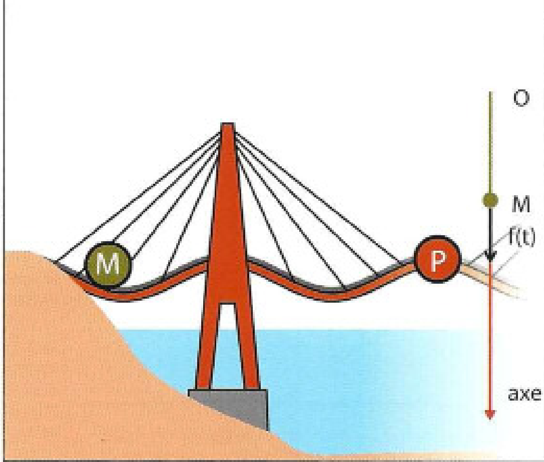
Le pont et les militaires

Qui n'a jamais entendu parler de ponts détruits par le passage d'une troupe de militaires au pas. Il est impossible d'expliquer ces destructions par un simple surpoids, la réalité démentant ces affirmations. Mais il nous est possible de chercher, de manière intuitive pour l'instant, la solution dans les vibrations.

Lorsque les militaires M marchent au pas sur notre pont P, leurs bottes frappent à l'unisson le tablier à intervalles réguliers (figure 3). L'élasticité du ***tablier*** le rend

semblable en première approximation, grossière certes, à un système masse-ressort en une dimension spatiale, lequel est soumis à une force périodique de norme f(t) le long de cet axe, voir figure 3.

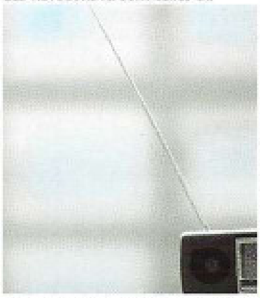
Figure 3



Nous étudierons ce système plus à fond ultérieurement, pour l'instant contentons-nous d'une interprétation au premier degré, lorsque la fréquence du pas des militaires approche la fréquence caractéristique du pont – les mouvements du pont et des bottes « se synchronisent » en quelque sorte –, l'amplitude d'oscillation du tablier augmente, jusqu'à ce que celui-ci atteigne son point de rupture.

La radio en modulation d'amplitude (AM)

Les vibrations ici sont celles du



champ électro-magnétique, que l'on capte à l'aide de l'***antenne*** métallique, en général une boucle, produisant un courant alternatif i(t), dans notre fil d'antenne. Ce courant est un signal qui contient la superposition de toutes les ondes qu'il a captées. Il nous faut donc sélectionner précisement celle qui nous intéresse, en l'occurence une fréquence précise, par exemple 1 200 kHz ou 1 600 kHz. Pour ce faire, il est intéressant de créer un circuit qui résonnerait sur cette fréquence et uniquement sur celle-ci, afin d'obtenir le signal de sortie le plus pur possible. En effet, si on soumet notre filtre à un mélange de signaux sinusoïdaux de fréquences variées, la sortie contiendra ce même mélange mais le profil des amplitudes respectives de ces harmoniques aura été changé au profit de celle qu'on cherche à isoler, et si ce filtre est parfait la sortie ne contiendra que la fréquence choisie. Ce signal de sortie doit être retraité, il n'est pas encore directement audible mais il s'agit là d'un autre problème.

Le diapason

Le ***diapason*** mécanique agit lui aussi comme un filtre. Le signal

d'entrée est le coup qui lui est donné, il est construit pour vibrer le plus précisément possible à 440 Hz.

LES VIBRATIONS ET LES SIGNAUX

Nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les théories mathématiques sur les signaux jouent un rôle important dès qu'on s'intéresse aux vibrations.

Une vibration ? Définition

Il s'agit d'une grandeur physique qui varie dans le temps. Le terme de « vibration » sous-entend une certaine périodicité dans le signal, au moins sur un petit intervalle de temps au regard de la période étudiée. La variation d'une grandeur physique complexe comme un vecteur est caractérisée par les variations dans ses composantes, qui sont des grandeurs scalaires, plus simples à manipuler.

Figure 1

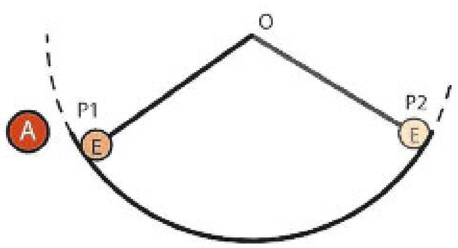
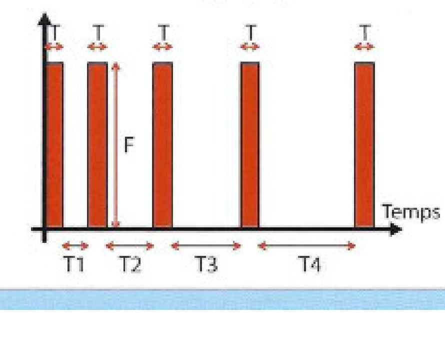


Figure 2

Intensité de la force appliquée par A sur E



Chiffres vibrants

1 Hz

Ordre de grandeur de la résonnance de la balançoire.

440 Hz

Fréquence de résonnance du diapason.

1 000 000

Ordre de grandeur des fréquences en radio AM.

1850

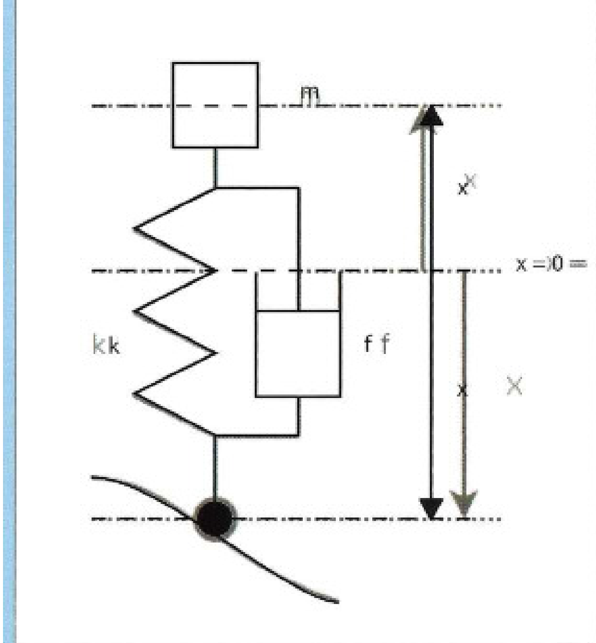
Un pont s'écroule à Angers pendant le passage d'une troupe de militaires au pas.

Joseph Fourier

Le père des **séries de Fourier**

1768-1830

Figure 4



DÉCOMPOSITION EN SIGNAUX SIMPLES : INTRODUCTION AUX SÉRIES DE FOURIER

Les séries de Fourier sont des outils extrêmement pratiques pour l'analyse de ce genre de problèmes. La théorie prédit que toute fonction périodique se ramène à une somme parfois infinie de fonctions trigonométriques, ou de fonctions exponentielles complexes, affectées de coefficients multiplicateurs. Pour étudier la réponse d'un système à un signal périodique donné e(t), on peut donc :

- étudier sa réponse à des fonctions trigonométriques
$$t_f(t) = e^{2i\pi t/f}$$
de fréquences f différentes
- puis décomposer notre signal d'entrée e(t) pour extraire ces coefficients c_f de Fourier
$$e(t) = \sum_f c_f * e^{2i\pi t/f},$$
- appliquer les changements sur nos c_f et recomposer la série en signal de sortie.

Ces fonctions présentent des comportements agréables lorsqu'on les dérive, de telle sorte que la résolution d'équations différentielles, très fréquentes en étude de ce genre de systèmes, en est grandement simplifiée.

LA RÉPONSE D'UN SYSTÈME À UN SIGNAL

À présent, nous sommes en mesure de réaliser une étude plus précise d'un problème.

OÙ VEUT-ON EN VENIR ?

Nous allons donc conduire l'étude en utilisant les outils que nous venons d'évoquer :

- résolution de l'équation différentielle du système à l'aide de fonctions trigonométriques générales ;
- caractérisation du signal d'entrée en terme de coefficients de Fourier.
- extraction de la réponse du système ;
- conclusion, analyse physique.

UN EXEMPLE : LE SALAIRE DE LA PEUR (1953, HENRI-GEORGES CLOUZOT)

Dans ce ***film***, les personnages principaux sont confrontés à un

problème d'apparence simple : il leur faut acheminer sur une route de désert une cargaison de nitroglycérine le plus vite possible. Nous nous proposons de leur apporter une analyse physique pour leur éviter de faire exploser leur cargaison : en fonction de la route, à quelle vitesse faudrait-il qu'ils roulent, pour rester en dessous d'une certaine amplitude de mouvement de leur véhicule.

Lecture intuitive du problème

La voiture est équipée d'un train roulant suspendu, que nous assimilerons à un système plus simple de type amortisseur-masse où l'amortisseur est la mise en parallèle d'un dispositif de frottement et d'un ressort, ainsi qu'il est présenté sur la figure 4.

Nous avons déjà rencontré ce genre de système lorsque nous avons présenté le système du pont et des militaires. L'occasion nous est donc offerte de l'étudier plus à fond. Notre sens physique et l'expérience de tous les jours nous poussent à croire que si la voiture roule suffisamment lentement, elle ne sera pas secouée. Mais n'y a-t-il pas d'autres régimes intéressants ? C'est ce que nous allons tenter de résoudre.

Quelques équations

Il est commun de présenter les hypothèses les plus frappantes lors du traitement d'un problème physique.

- Les roues de notre véhicule sont fixées au sol, c'est une hypothèse fortement simplificatrice, elle nous évite d'avoir à considérer deux régimes d'équations différentielles : celles où le véhicule serait en appui sur le sol et un autre où il serait en chute libre, avec une vitesse initiale déterminée par la fin de la phase précédente, c'est-à-dire qu'il faudrait faire une étude numérique pour savoir quand la voiture touche terre et quand elle vole et résoudre alors les bonnes équations. Notre hypothèse de contact n'est pas si restreignante quand on garde à l'esprit qu'on veut éviter à la niroglycérine de subir trop de chocs.
- On modélise la déperdition d'énergie à l'amortisseur par un frottement visqueux simple, une force de la forme :
$$-f.\vec{v}, f > 0$$
C'est une approche très habituelle en physique.
- Les roues de notre automobile sont considérées comme quatre systèmes indépendants, m la masse de notre système est le quart de celle du total.
- La voiture est un système rigide, on peut la modéliser comme une masse ramenée à un point. On peut donc déterminer l'équation (4.1) qui régit l'évolution du système, elle est différentielle de degré deux :

$$m.\ddot{x} = m.g - f.(\dot{x} + \dot{X}) -$$
$$k.(x + X)$$

où :

– m est le quart de la masse de la voiture, c'est la masse de notre système ;
– a.b, la multiplication de a par b ;
– ẍ, la dérivée seconde temporelle de x, ẋ, la dérivée simple ;
– x, la position de notre véhicule par rapport au niveau de référence ;
– g, l'accélération de la gravité ;
– f, notre coefficient de frottement ;
– k, la raideur du ressort ;
– X, le niveau du sol, c'est l'entrée de notre système, en fonction de la vitesse du véhicule, sa fréquence changera linéairement.

Il s'agit de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique en projection sur l'axe vertical. Le terme m.ẍ est l'accélération du mobile, m.g la contribution de sa masse, –f.(ẋ + Ẋ) est associé aux frottements et –k.(x + X) la force de rappel du ressort.

Grâce aux travaux de Fourier, il nous suffit d'étudier les cas où X est de la forme $A.e^{i\omega t}$ pour pouvoir en tirer des conclusions plus générales.

Si on résoud l'équation homogène tirée de 4.1 :

$$m.\ddot{x} = -f.\dot{x} - k.x$$

Il apparaît que les seules solutions – physiquement sensées – sont de la forme :

$$x = e^{-rt}.(\alpha.e^{i\omega_0 t} + \beta.e^{-i\omega_0 t}),$$
$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{4.k}{m} - \frac{f^2}{m^2}}, r = \frac{f}{2.m}$$

Il s'agit d'un exercice traité en détail dans d'autres ouvrages, plus généralistes – voir l'analyse du circuit RLC, qui est l'analogue électronique de ce système. Ces solutions sont des oscillations amorties, des régimes transitoires, pendant lesquels les amortisseurs passent d'une position à une autre. On les oubliera dans la suite, considérant que la voiture est bien réglée et que ces régimes s'amortissent rapidement. Reste donc à trouver une solution particulière à l'équation 4.1. On postule une solution de la forme :

$$B.e^{i\omega t} + \frac{m.g}{k}, B \in \mathbb{C}$$

semblable à la forme de X, agrémentée d'un terme qui correspond à l'enfoncement de l'amortisseur sous le poids du véhicule. Il vient :

$$B.(-m.\omega^2 + if\omega + k) =$$
$$= -A.(if\omega + k)$$

et

$$H = |\frac{B}{A}| = |\frac{1}{1 - \frac{m.\omega^2}{k + if\omega}}|$$

H est ce que l'on nomme la fonction de transfert, elle répond à la question : « à une entrée d'amplitude donnée, de pulsation ω, quelle sera le coefficient multiplicateur sur l'amplitude de sortie ? »

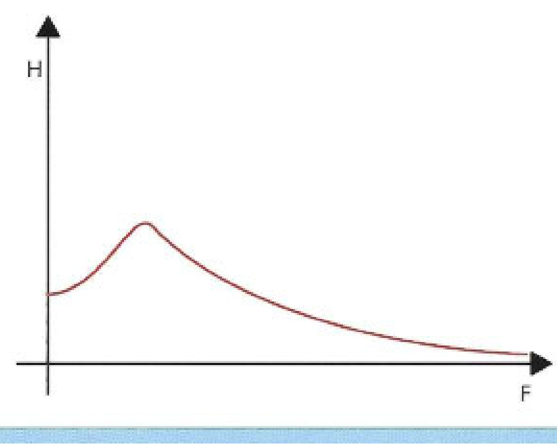
La solution : réponse en fréquence

Grâce à H, on a à présent la réponse à nos interrogations, pour des valeurs typiques de m , k et f, la réponse en pulsation – où en fréquence ω = 2π.F, où F est la fréquence et ω la pulsation – a l'allure présenté en figure 5.

La fréquence de notre signal X et le rapport entre fréquence géométrique de la route et vitesse étant directe, F peut être vu comme directement proportionnelle à v la vitesse de la voiture.

Il apparait donc que pour des vitesses faibles, H et donc l'amplitude d'oscillation de la voiture restera normale, puis à mesure que la vitesse augmente, la course se fera plus chaotique, pour ensuite redevenir plus agréable, nos coursiers ont donc deux options : rouler tout doucement où à tombeau ouvert, pour livrer le chargement de dynamite.

Figure 5



QUELQUES EXPLICATIONS SUPPLÉMENTAIRES

On peut bien sûr objecter que la route n'est pas sinusoïdale, mais grâce aux outils de Fourier on peut décomposer ce signal a priori quelconque en une combinaison linéaire de sinusoïdes qui stimuleront toutes isolément la voiture. Celle-ci répondra selon la courbe de gain de H et son mouvement sera la superposition de toutes ces réponses, donc si H est faible à toutes les fréquences considérées, le mouvement aura peu d'amplitude. C'est là toute la puissance de la décomposition en harmoniques. Le lecteur peut s'interroger sur le passage d'une périodicité spatiale, celle de la route, à notre X, fonction du temps uniquement et devra s'imaginer la voiture telle une pointe en diamant sur un ***disque vinyle***, qui transforme ce signal spatial

en signal temporel, il en découle la relation linéaire qui lie périodicités spatiale et temporelle au travers de la vitesse. Pour référence, voici des ordres de grandeur de k, f et m trouvés dans la littérature :

- 10^4 N.m^{-1} < k < 10^5 N.m^{-1}
- m = 400 kg
- f ~ 10^2 N.s.m^{-1}.

CONCLUSION

Les transformations de Fourier sont cruciales pour la théorie des signaux vibratoires, en ce qu'elles permettent, grâce à l'exponentiation complexe, la simplification des formes de signaux et des équations différentielles.

L'analyse des systèmes se fait en général en trois étapes :

– analyse du spectre en fréquence du signal d'entrée ;
– caractérisation de la réponse du système ;
– recomposition de la fonction de sortie ou analyse directe.

Le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages traitant de ces techniques de décomposition ainsi que de la théorie mathématique sous-jacente à ces outils. L'exponentielle complexe est souvent utile, ainsi que les méthodes de résolution d'équations différentielles, qui n'ont été ici qu'effleurées.