Les **volumes**

DES CALCULS UTILES

La nécessité de mesurer la « quantité d'espace » qu'occupent les solides est apparue relativement tôt dans l'histoire de l'humanité. En effet, dès que les échanges économiques ont pris une certaine ampleur, c'est-à-dire dès la plus haute antiquité, les hommes ont eu besoin de déterminer des contenances : volume de greniers ou d'entrepôts, contenances de vases, de tonneaux, de cales de bateaux mais aussi toutes les quantités liées aux volumes, par exemple les densités utilisées dans le contrôle des alliages de métaux précieux. Différentes méthodes ont été mises en œuvre pour connaître la capacité d'objets de la vie courante. Depuis le procédé qui consiste à plonger le solide dont on veut évaluer le volume dans un récipient rempli de liquide et de mesurer ensuite la quantité de liquide déplacée jusqu'au calcul intégral, les progrès furent engendrés par la nécessité de précision des calculs dans les échanges commerciaux autant que par la curiosité purement mathématique.

DU CONCRET À LA THÉORIE

Premières esquisses

Des documents très anciens, comme certaines tablettes babyloniennes (2800 avant J.-C.), montrent les comptes de commerçants ou des contrats exprimant diverses unités de volumes et de capacités comme le silla (0,85 litre environ) ou le gour et donnant des procédés de calculs approchés de volumes simples.
Du côté de l'Égypte ancienne, le papyrus de Rhind, rédigé par un scribe nommé Ahmès vers 1650 av. J.-C., donne la preuve que les copistes de l'époque avaient des méthodes plus ou moins approchées pour calculer les volumes des solides courants comme le cube, les prismes, les pyramides, les cylindres et les cônes. Ahmès indique des « règles pour mesurer un magasin de forme ronde pour les fruits ».
Le papyrus de Moscou (1850 avant J.-C.) en est un autre exemple. On y trouve de nombreux problèmes de géométrie dont une grande majorité concerne les formules de calcul d'aires et de volumes des figures usuelles. Un de ceux-ci s'exprime ainsi : « si l'on vous dit : une pyramide tronquée de hauteur 6 et de base 4 et 2 ; vous devez prendre le carré de 4 qui donne 16, puis doubler 4 qui donne 8, prendre le carré de 2 qui donne 4. Ajouter 16, 8 et 4 qui donnent 28, prendre 1/3 de 6 qui donne 2, prendre 2 fois 28 pour donner 56. Tu vois c'est 56. »
On remarque qu'aucune formule n'est donnée et que les calculs sont strictement procéduraux.

Des Grecs à nos jours

Il faut attendre la géométrie grecque pour introduire un peu de rigueur et exprimer les volumes en fonction de certaines dimensions du solide.
Euclide (IIIe siècle avant J.-C.) donne, dans le livre XII proposition 9 des Éléments, le volume de la pyramide, puis, dans les propositions 10 à 15, ceux du cylindre droit et du cône de révolution. Il donne aussi le volume de la sphère et il démontre que « les sphères sont entre elles en raison triplées de leurs diamètres » ce qui, traduit dans une formulation moderne, se dirait : les volumes de deux sphères sont proportionnels aux cubes de leurs diamètres.
Petit à petit, les mathématiques se détachant de la vie pratique, les volumes furent étudiés pour eux-mêmes et des techniques de calcul plus générales furent recherchées. C'est ainsi qu'on est passé du simple découpage et réassemblage de solides, aux notions de calcul infinitésimal et d'intégrales multiples.

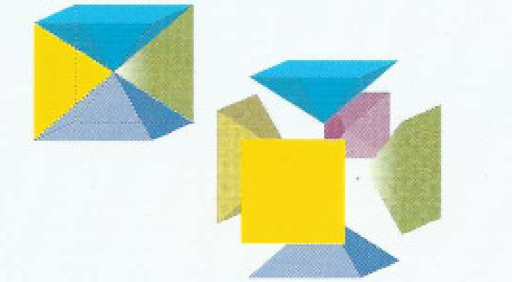
LE DÉCOUPAGE DE L'ESPACE

Comment mesurer la contenance d'un solide dont les faces sont formées par des parties de plan ? Un des moyens consiste à comparer le volume à mesurer à un volume connu. Ainsi, bien avant Euclide, les géomètres trouvent le volume d'une pyramide à base carrée en découpant un cube en six pyramides identiques. On décompose ainsi un cube en six pyramides dont les bases sont les carrés des six faces du cube et le sommet est de centre du cube. Leur hauteur est donc la moitié de l'arête du cube. Il y a donc une pyramide par face du cube soit 6 pyramides de même volume et de dimensions égales. Si on appelle a l'arête du cube de départ on a :
• Volume du cube $= a^3$
• Volume du cube exprimé en fonction de la hauteur des pyramides : $a^3 = a^2 \times 2 \times 1/2\, a$
car $1/2\, a$ est la hauteur d'une pyramide, on nommera h la quantité $1/2\, a$.
Comme il y a 6 pyramides identiques dans le cube, on a donc :

$$\frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \frac{1}{2} h}{6} = \frac{a^2 h}{3} = \frac{1}{3} a^2 h$$

Le volume d'une pyramide à base carrée est égal à un tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur.
Euclide utilise le découpage en morceaux du solide dont il veut mesurer le volume. Il les réarrange ensuite, à la façon d'un puzzle, de manière à reconstituer un solide de forme connue et dont il sait calculer le volume. Cette méthode va ouvrir des champs aux mathématiques futures mais ne sera pas celle retenue pour calculer tous les volumes. En effet, on s'aperçoit des limites pour les mesures de volumes de solides dont les surfaces sont courbes. De plus, tous les solides ne peuvent pas être découpés de manière à reformer un solide donné comme le montreront les mathématiciens du XXe siècle.

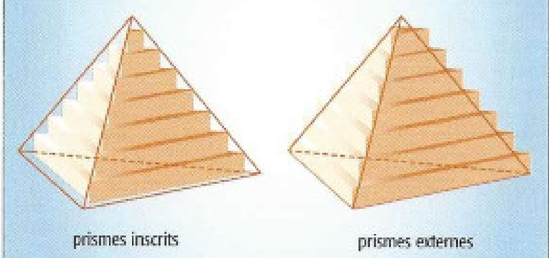
Découpage du cube en six pyramides de même volume



LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

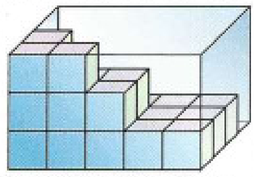
Qu'en est-il pour une pyramide dont la base n'est pas carrée ? Archimède apporte une réponse originale en utilisant une méthode mise au point par Eudoxe de Cnide (–408, –355) : la méthode par exhaustion, embryon de calcul infinitésimal. Il découpe la pyramide en tranches d'égale épaisseur, parallèles à la base.
On obtient ainsi un solide en « marches d'escalier », composé de l'empilement de prismes dans lequel la pyramide est inscrite. Chaque tranche de pyramide a un volume assez proche de celui du prisme droit qui aurait pour base la section de la pyramide. Bien sur, plus les tranches sont nombreuses plus la hauteur est petite et plus la différence entre le volume de la section de pyramide et celui du prisme est petite. On peut ainsi approcher la valeur du volume à une précision donnée. On procède de la même manière en inscrivant le prisme en marches d'escalier dans la pyramide. Le volume de la pyramide est donc encadré par les volumes des deux solides en escalier, un inscrit dans la pyramide, l'autre la contenant.

Méthode d'exhaustion



LE PAVAGE

Il existe d'autres méthodes pour mesurer le volume d'un solide S. Par exemple, on pourra le remplir de solides s plus petits, de la forme d'un cube ou autre volume connu, rangés de telle façon qu'il n'y ait plus d'espace vide entre eux. On compte le nombre des solides s pour connaître le volume du solide S. On voit ici aussi les limites d'une telle méthode. La première difficulté réside dans le fait que le solide avec lequel on mesure doit s'adapter à la forme du solide à mesurer. Les géomètres ont contourné cette difficulté en remplissant le solide avec des cubes de très petite taille, collant au mieux à la surface du solide. Ils approchent ainsi le volume de S en réduisant la taille des vides laissés le long de sa paroi.
Par analogie avec ce qui se passe dans le plan, on peut dire que l'aire d'une figure *F* est le nombre de fois qu'un carré de coté 1 unité est contenu dans la figure *F*. On dit qu'on a fait un ***pavage carré*** de la figure *F* si les carrés remplissent entièrement la figure *F* sans débordement et sans espace vide entre eux. Transposé aux solides, si les cubes sont rangés de telle manière qu'il n'y ait aucun vide entre eux, on dit qu'on a fait un pavage cubique de l'espace. Le volume d'un solide est donc le nombre de cubes d'arête 1 unité de longueur qui ont servi à paver ce solide.



Grâce au pavage, on peut mesurer n'importe quel solide pourvu que ses arêtes soient droites et qu'on puisse le paver de cubes ou de morceaux de cube. En effet, on montre facilement que n'importe quel prisme est égal, par découpage et réassemblage, à un parallélépipède de même hauteur.
Le cube avec lequel on pave le solide, est maintenant l'unité de mesure des volumes. Si ce cube étalon a pour longueur d'arête 1 mètre, il représente 1 m³.
Rapidement s'est posé le problème des solides dont la surface qui les délimite n'est pas droite, comme le cylindre ou la sphère ou dont le volume ne peut être pavé par des cubes comme dans le cas de la pyramide.

CALCULS DE VOLUMES

On a vu l'importance du découpage de l'espace pour définir une description du volume. Avec la méthode d'exhaustion, Archimède avait également conçu un procédé de calcul.
Dans le cas de la pyramide, les deux volumes, formés par les escaliers des prismes intérieur et extérieur, forment deux suites V(n) et V'(n) où n est le nombre de tranches. En utilisant le vocabulaire et les notations modernes, on peut dire que la suite V'(n) du volume circonscrit est décroissante minorée et tend, par valeurs supérieures, vers le volume V de la pyramide. De façon analogue, la suite V'(n) des volumes du solide inscrit est croissante majorée, elle tend, elle aussi, vers le volume V de la pyramide. Archimède calcule une valeur approchée du volume total de la pyramide en faisant la somme des volumes de tous les prismes formant les « marches de l'escalier » ; cette valeur est d'autant plus précise que la hauteur des tranches est petite et que leur nombre n est grand.
En utilisant les notations modernes,

Équivalences

1 L = 1 dm³

1 pinte UK = 0,568 26 L

1 gallon (US) = 3,785 4 L

1 pied cubique = 28,317 L

1 boisseau = 35,239 L

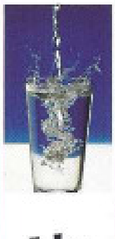
1 baril de pétrole = 159 L

1 tonneau de jauge international = 2 000 L

1 stère = 1 m³ de bois de chauffe

la **référence**

Un litre d'eau pure (soit 1 dm³)



1 kg

appelons V_n le volume du prisme en escalier inscrit dans la pyramide où n désigne le nombre de « marches ». Si on appelle B l'aire de la base de la pyramide et h sa hauteur, on a la valeur de l'aire de la base du k-ième prisme qui est égale à

$$B_k = B\frac{k^2}{n^2}$$

car les aires sont proportionnelles au carré des longueurs. On a donc :

$$V_n = \frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n-1} B\frac{k^2}{n^2} = \frac{Bh}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Or les mathématiciens de l'époque connaissent bien cette formule qui permet de calculer la somme des carrés des *n* premiers nombres entiers :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient donc :

$$V_n = \frac{1}{3}Bh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

On remarque que les quantités $1/n$ et $1/2n$ deviennent de plus en plus petites au fur et à mesure que le nombre de « tranches » augmente. Si bien qu'on pourrait les considérer comme négligeables. L'erreur commise est un facteur $(1 - 1/n)$ $(1 - 1/2n)$.
Il vient alors la formule connue du volume d'une pyramide :
$V = 1/3\ Bh$
C'est un embryon de ce que va être le calcul infinitésimal qu'Archimède met en place avec cette méthode. Il ne manque plus que le passage à la limite, c'est-à-dire faire tendre le nombre de tranches vers l'infini et réduire l'épaisseur des tranches à une « quantité évanouissante » comme les appellera plus tard Leibniz (1646-1716), l'inventeur du calcul infinitésimal.
D'une manière plus moderne et en employant les limites, on a :

$$V = \lim_{n\to\infty} V(n)$$

$$V = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}Bh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

et

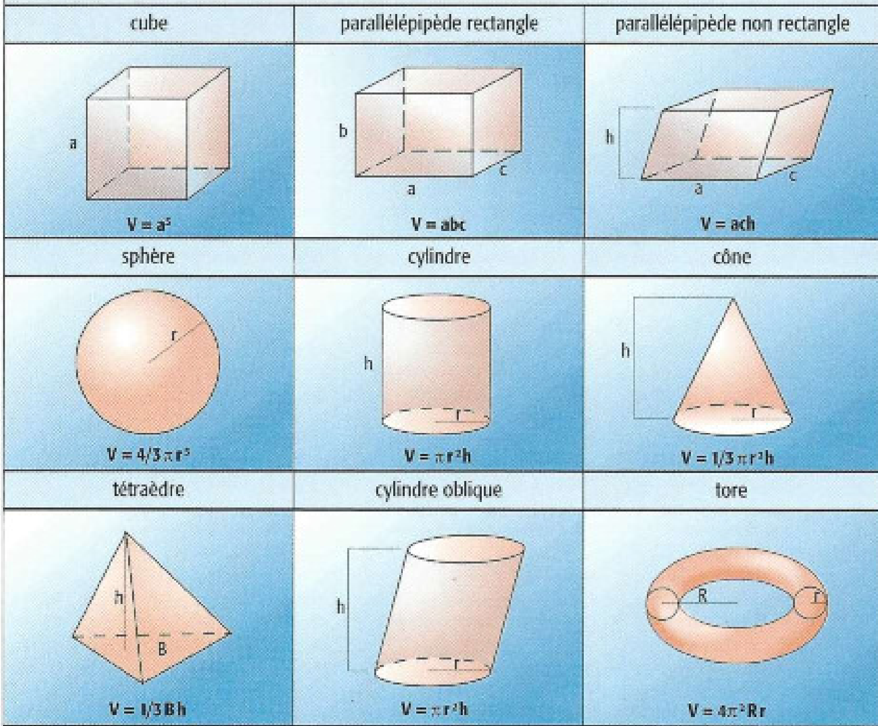
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right) = 1$$

on obtient :
$V = 1/3\ Bh$

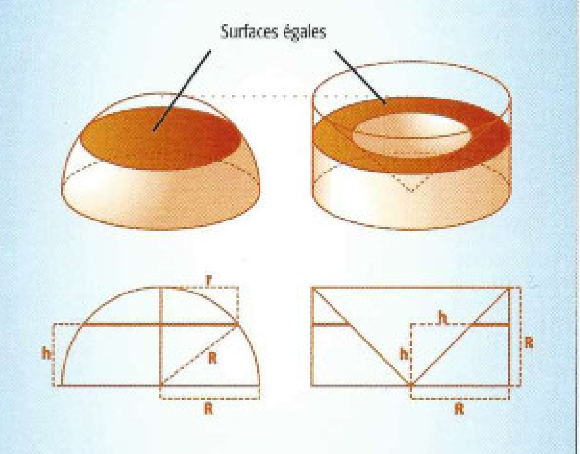
DÉTERMINATION DU VOLUME DE LA SPHÈRE

En 1629, Cavalieri, mathématicien Milanais, développe la méthode des indivisibles dans ses *Exercitationes geometricae*, méthode qui allait inspirer ses successeurs pour le développement du calcul intégral. Il fut l'élève de Galilée qui reconnut très vite son génie. Inspiré par les travaux d'Euclide et d'Archimède, il calcule le volume de la sphère selon une méthode qui n'est pas sans rappeler celle de ce dernier.
Que dit ce principe ? *« Si deux solides ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des plans parallèles aux bases de ces deux solides et à distances égales de celles-ci sont dans un rapport donné, alors les volumes des deux solides sont aussi dans le même rapport. »*
Cavalieri considère que tout solide est la somme de morceaux de surfaces planes et donc que le volume de ce solide est la somme des aires de ces surfaces, c'est le principe des indivisibles. Ce principe fut très contesté, notamment par Guldin qui montra à travers un exemple qu'il pouvait déboucher sur des résultats faux. Il reste qu'il est historiquement fondateur du calcul infinitésimal.
Certes ce principe est peu rigoureux mais il est souvent efficace et permet de comparer les volumes de deux solides de formes apparemment très différentes. Pour l'illustrer, prenons un jeu de carte, empilées les unes sur les autres. Chaque carte représente un indivisible. L'ensemble des cartes a un certain volume, si nous déformons le tas de cartes, par exemple en en appuyant la paume de la main sur le jeu et en faisant tourner les cartes, nous obtenons un autre solide, une espèce de vis dont le volume est le même que celui de notre tas de cartes parallélépipédique du départ.
Nous avons donc deux volumes qui ont la même hauteur (celle du jeu de carte) et qui sont coupés par des sections planes (chaque carte) qui sont dans un rapport de 1 puisque toutes les cartes ont la même aire. On en conclut que les deux volumes sont égaux.
Pascal utilisera ce principe abondamment, notamment pour calculer le volume du solide engendré par une cycloïde tournant sur son axe.

Volumes usuels



Application du principe de Cavalieri



Un corollaire de ce principe : prenons deux solides et effectuons sur eux des sections planes parallèles à la même hauteur. Si les sections homologues de chacun des solides ont la même aire, alors les volumes des deux solides sont égaux.
C'est la méthode employée par Archimède et reprise par Cavalieri pour donner la formule du volume d'une sphère.
En effet, on remarque que l'aire d'une section plane d'une demi-sphère est la même que celle opérée à la même hauteur sur un cylindre de même diamètre et de même hauteur que la demi-sphère et évidé d'un cône renversé. En effectuant des sections planes de la demi-sphère on obtient des disques D_n dont l'aire varie en fonction de la hauteur à laquelle on effectue la section. En effectuant la section du cylindre évidé d'un cône, on obtient des couronnes circulaires C_n ayant la même aire que chacune des sections D_n de la demi-sphère.
Si on appelle *h* la hauteur de la section, *r* son rayon et *R* le rayon de la demi-sphère on a, d'après le théorème de Pythagore :
$r^2 = R^2 - h^2$. L'aire de la section est donc $\pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$. Pour calculer l'aire de la couronne dont le bord extérieur est le cercle du cylindre et le bord intérieur est le cercle du cône, on remarque que le rayon du cercle déterminé par la section du cône est égal à la hauteur. L'aire de la couronne est la différence entre l'aire du grand disque de rayon R et l'aire du petit disque de rayon h :
$A_{couronne} = \pi R^2 - \pi h^2$
et en factorisant par π on obtient :
$A_{couronne} = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2$
qui est bien égale à l'aire de la section de la demie sphère.
Il est aisé de calculer le volume de la demi-sphère en sachant qu'il est égal à celui du solide formé par le cylindre évidé d'un cône.

Le volume du cylindre est
$\pi R^2 \times R = \pi R^3$
Le volume du cône est
$1/3\ \pi R^2 \times R = 1/3\ \pi R^3$
Le volume de la demi-sphère est la différence entre les deux volumes :
$\pi R^3 - 1/3\ \pi R^3 = 2/3\ \pi R^3$
Pour avoir le volume de la sphère complète, il suffit de multiplier par 2 :
$V_{sphère} = 4/3\ \pi R^3$

VOLUME ET CALCUL INTÉGRAL

Le principe de Cavalieri, s'il est simple à comprendre, pose quand même quelques questions théoriques aux mathématiciens. En effet, il énonce que la somme d'aires est un volume, ce qui est paradoxal car les unités ne sont pas homogènes. C'est vers la fin du XVII^e siècle que plusieurs mathématiciens, notamment Leibniz et Newton, formalisent la notion de « tranches » en introduisant la notion de différentielle qu'on note dx. Plus tard, Riemann et Lebesgue consolideront et enrichiront la notion d'intégrale.
L'idée est toujours la même : découper un volume en cubes dont on fera tendre la longueur de l'arête vers zéro. C'est grâce au calcul intégral qu'il a été possible notamment de calculer le volume des solides de révolutions, ces solides engendrés par une courbe – droite dans le cas des cylindres et des cônes – qui tourne autour d'un axe.

UNITÉS DE VOLUME

L'unité internationale est le mètre cube (m^3) qui est le volume d'un cube d'un mètre de longueur d'arête. Les sous-multiples sont le décimètre cube (dm^3), le centimètre cube (cm^3) et le millimètre cube (mm^3). Les multiples sont le décamètre cube (dam^3), l'hectomètre cube (hm^3) et le kilomètre cube (km^3).

Il existe des mesures de capacités qui sont le litre (L) et ses sous-multiples usuels le décilitre (dL), le centilitre (cL) et le millilitre (mL). Ses multiples communs sont le décalitre (dal) et l'hectolitre (hl), le kilolitre n'est pas employé. Il existe d'autres unités exprimant la contenance mais elles sont peu employées. Le stère, par exemple, mesure 1 m^3 de bois de chauffe.
Si on multiplie par k les mesures d'un solide, son volume est multiplié par k^3.
Comme les unités de longueur sont dans un rapport de 10, les volumes sont donc multipliés par 10^3 soit 1 000. C'est pour cette raison que chaque colonne du tableau de conversion doit contenir trois chiffres. Pour convertir un volume dans une autre unité, on place le nombre dans le tableau, les unités dans la colonne des unités employées et on lit le nombre dont les unités sont celles de la colonne de l'unité dans laquelle on veut convertir. Par exemple, on veut convertir 18 m^3 en cm^3. On place 18 dans la colonne des m^3, ce nombre a moins de 3 chiffres, il tient entièrement dans la colonne des m^3. La colonne à droite des m^3 est celle de dm^3, on la remplit avec 3 zéros, celle de droite est celle des cm^3, on la remplit aussi de trois zéros. Et on lit le nombre dont les unités sont les unités de cm^3 soit 18 000 000 cm^3.

		m³			dm³			cm³
	1	8	0	0	0	0	0	0

Les unités de capacité comme le litre, ne fonctionnent pas comme les unités de volume car elles sont indépendantes des unités de longueurs. On passe d'une unité à son sous-multiple en divisant par 10 comme pour les unités de longueurs. Pour passer d'un système à l'autre nous avons l'équivalence 1 dm^3 = 1 litre. Par exemple, si on veut convertir 37 cm^3 en cL il faut déjà convertir les cm^3 en dm^3. On trouve que 37 cm^3 = 0,037 dm^3 soit 0,037 litre. On a donc : 37 cm^3 = 3,7 cL.